



$$\Rightarrow x^2 + y^2 - (x+y)^2 + 2(x+y) - 1 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - x^2 - y^2 - 2xy + 2x + 2y = 2 \Rightarrow x + y - xy = 1 \Rightarrow x(1-y) = 1-y$$

$$\Rightarrow (x-1)(1-y) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

بنابراین صفحه مماس بر رویه در دو خط راست با رویه اشتراک دارد. اگر بخواهیم معادله‌ی این دو خط را بنویسیم داریم:

$$x=1, z=x+y-1 \Rightarrow L_1: x=1, z=y$$

$$y=1, z=x+y-1 \Rightarrow L_2: y=1, z=x$$

مثال ۲۳۹: رویه‌ی $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{c}$ مفروض است. مجموع طول و عرض و ارتفاع از مبدأ صفحه مماس بر رویه در هر نقطه آن برابر است با:

(علوم کامپیوتر - سراسری ۹۳)

$$c \quad (4)$$

$$\frac{\sqrt{c}}{3} \quad (3)$$

$$\sqrt{c} \quad (2)$$

$$3\sqrt{c} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه «۴» رویه $f(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{c}$ را در نظر بگیریم. فرض کنیم $P(x_0, y_0, z_0)$ نقطه‌ای دلخواه از این رویه باشد.

معادله صفحه مماس بر رویه در نقطه P را می‌نویسیم. ابتدا مشتق‌های جزئی را حساب کنیم:

$$f_x(P) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}, \quad f_y(P) = \frac{1}{2\sqrt{y_0}}, \quad f_z(P) = \frac{1}{2\sqrt{z_0}}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0) + \frac{1}{2\sqrt{y_0}}(y-y_0) + \frac{1}{2\sqrt{z_0}}(z-z_0) = 0$$

پس معادله صفحه مماس چنین است:

طول از مبدأ این صفحه را به‌دست آوریم:

$$\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x-x_0) - \frac{y_0}{2\sqrt{y_0}} - \frac{z_0}{2\sqrt{z_0}} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{x_0}(\sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) + x_0 = \sqrt{x_0}(\sqrt{y_0} + \sqrt{z_0} + \sqrt{x_0}) = \sqrt{c}\sqrt{x_0}$$

به همین ترتیب با جایگذاری $x=0$ و $z=0$ عرض از مبدأ برابر است با $y = \sqrt{c}\sqrt{y_0}$ و به ازای $x=0$ و $y=0$ ارتفاع از مبدأ برابر است با $z = \sqrt{c}\sqrt{z_0}$.

$$\sqrt{c}\sqrt{x_0} + \sqrt{c}\sqrt{y_0} + \sqrt{c}\sqrt{z_0} = \sqrt{c}(\sqrt{x_0} + \sqrt{y_0} + \sqrt{z_0}) = \sqrt{c}\sqrt{c} = c$$

مجموع این سه مقدار برابر است با:

مثال ۲۴۰: اگر θ زاویه بین بردار نرمال بر رویه $z = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} + (x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}}$ در نقطه‌ی $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ و محور z ها باشد و $L = \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} |\cos \theta|$ ،

(ریاضی و آمار - سراسری ۹۳)

گزینه صحیح کدام است؟

$$L = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (4)$$

$$L = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (3)$$

$$L = 0 \quad (2)$$

$$L = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه «۴» معادله رویه داده شده را به‌صورت $g(x, y, z) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} + (x^2 + y^2)^{\frac{2}{3}} - z = 0$ می‌نویسیم. بردار عمود بر رویه همان بردار

$$\vec{\nabla} g = (g_x, g_y, g_z) = (x(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}x(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{3}}, y(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{2}{3}y(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{3}}, -1)$$

گردان g است:

$$x(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{اما به وضوح به صفر میل خواهند کرد، به } \frac{2}{3}y(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{3}} \text{ و } \frac{2}{3}x(x^2 + y^2)^{-\frac{1}{3}}$$

$$\text{و } \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ دارای فرم مبهم هستند. بنابراین } (-1, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}) \text{ به } \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \vec{\nabla} g = \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} (-1, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}})$$

z ها است. اگر θ زاویه بین $\vec{\nabla} g$ و $\vec{k}$ باشد، خواهیم داشت:

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \cos(\theta) = \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{|\vec{\nabla} g \cdot \vec{k}|}{|\vec{\nabla} g| |\vec{k}|} = \lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2 + y^2} + \frac{y^2}{x^2 + y^2} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$